



ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ
РОССИЙСКИХ И
ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И
ОЛИМПИАД

- +7 495 650-99-95
- +7 495 694-36-00
- +7 925 505-24-42
- +7 916 151-25-94
- info@albioncom.ru

Занятие №4 (28.10.2023)

Кружок по математике



Несколько слов о домашнем задании



Задача №1

Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица или остальных?

Задача №1

Решение:

Количество всех семизначных чисел –

$$9 * 10 * 10 * 10 * 10 * 10 * 10 = 9 * 10^6$$

Количество семизначных без единиц –

$$8 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9 = \underline{8 * 9^6}$$

Тем самым семизначных чисел, содержащих единицу, будет –

$$= \underline{9 * 10^6 - 8 * 9^6}$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно сравнить полученные количества

Задача №1

Решение: Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно сравнить полученные количества:

$$8 * 9^6 ? 9 * 10^6 - 8 * 9^6$$

$$2 * 8 * 9^6 ? 9 * 10^6$$

$$16 * 9^6 ? 9 * 10^6$$

$$16 * 9^5 ? 10^6$$

Задача №1

Решение: Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно сравнить полученные количества:

$$944784 < 1000000$$

$$16 * 9^5 < 10^6$$

То есть, количество семизначных с единицей больше, чем всех остальных.

Задача №2

У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?

б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Задача №2

Решение:

а) На завтрак людоед может предпочесть любого из 25 человек, на обед – любого из 24 оставшихся, а на ужин – кого-то из 23 оставшихся счастливиц. Всего получаем $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способов.

б) Заметим, что в предыдущем пункте каждую тройку пленников мы посчитали $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ раз. Поскольку теперь их порядок нам неважен, то ответом будет число $13800 : 6 = 2300$.

Блиц-задача



"КТО С КЕМ ТАНЦУЕТ?"

Холмс, позвольте представить вам моих новых друзей, победителей танцевального конкурса Великобритании!

Очень рад! Прошу к столу!

Джон!

Артур!

Генри!

Кэти!

Мери!

Роза!

Попробуйте-ка отгадать, кто с кем танцует!

Я думаю, наши гости обязательно проговорятся.

Каждая девушка моложе своего партнёра на 3 года.

Мне вместе с Джоном 36 лет.

А нам вместе с Кэти 40 лет.

И самая молодая среди нас – Роза.

Теперь я знаю, кто с кем танцует.

Но как, Холмс?

- Если каждая девушка моложе своего партнера на 3 года:

$$X + X + 3 = 2 * X + 3 - \text{нечетное}$$

Получается, что Кэти танцует с Генри

Роза с Джоном

Мэри с Артуром

Четвертое занятие.

Комбинаторика 2



Пятизначные числа

(Математический праздник, 1996, 6) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Challenge 251: Chatty Classmates

Mrs Green is teaching a class of eight students, which she knows consists of four pairs of “Best Friends”. She needs to divide them into pairs for an activity, but she also knows that if she puts any pair of best friends together then they will chat all lesson and get no work done.

How many ways can she put them into productive pairs?

Выборки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \leq n$), то говорят, что из этого множества *произведена выборка* объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об *упорядоченной выборке*, а если нет – о *неупорядоченной*.

Размещения

Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов и обозначается через A_n^k .

Символ A_n^k читается: «а из n по k » или «число размещений из n по k ». A – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), \text{ где } 1 \leq k \leq n.$$

Размещения

Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов и обозначается через A_n^k .

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), \text{ где } 1 \leq k \leq n.$$

Задача. Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

Размещения

Заметим также, что A_n^k можно записать и по-другому ($k < n$):

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Чтобы эта формула действовала и при $k = n$, примем по определению, что $0! = 1$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (читается «эн факториал»).

Бильярдные шары

Сколькими способами 15 пронумерованных бильярдных шаров могут распределиться по шести лузам?

Размещения с повторениями

Число способов выбрать упорядоченные k элементов из n , если им разрешено повторяться, называется *числом размещений с повторениями* и обозначается как \bar{A}_n^k .

Выведите формулу для нахождения \bar{A}_n^k .

Размещения с повторениями

Число способов выбрать упорядоченные k элементов из n , если им разрешено повторяться, называется *числом размещений с повторениями* и обозначается как \bar{A}_n^k .

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Перестановки

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n .

Символ P_n происходит от французского слова Permutation - «перестановка».

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (читается «эн факториал»).

Перестановки

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n .

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Задача. У нас есть набор из восьми карточек с буквами «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь». Вопрос: сколько восьмибуквенных «слов» можно составить из этих карточек?

Десятитомник

Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Спасибо за внимание!

Совсем скоро презентация и домашнее задание появятся на гугл-диске и на сайте)

Домашнее задание присылайте на почту -

info@oxbridge.ru

В теме письма указывайте фамилию, предмет и номер группы

Не забудьте отправить ДЗ не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Хороших выходных!



Использованные материалы

- Архив журнала «Квантик» <https://kvantik.com/archive/>
- Архив занятий Малого Мехмата МГУ <http://mmmf.msu.ru/archive/>
- Задачи с сайта <https://problems.ru/>
- Задачи с сайта <https://www.kingsmathsschool.com/weekly-maths-challenge> (King's Maths School)
- Коновалов С.П. "Материалы ЗФТШ"